

Nauka otwiera drzwi

Psychologia poznawcza wobec matematyki

Edward Nęcka
Instytut Psychologii UJ

Psychologia poznawcza

Jak działa umysł?

Jako całość

Jako wyspecjalizowane moduły (pamięć, uwaga)

Naturalne ograniczenia umysłu

(De)koncentracja uwagi

Pojemność pamięci operacyjnej) roboczej

Ograniczona racjonalność

Umysł a codzienne czynności poznawcze

Czytanie, pisanie, mówienie, słuchanie

Planowanie

Decydowanie

Liczenie

Skąd umysł?

Ewolucyjne pochodzenie umysłu

Nie rozwinął się do uprawiania matematyki (filozofii itd.)

Ale rozwinął się do „użytecznych” czynności, takich jak

Kategoryzowanie

Liczenie

...

Gdy już się rozwinął, okazał się niezwykle sprawny w czynnościach wymagających abstrakcji

Dlaczego? Maszyna ogólnego zastosowania czy wyspecjalizowane moduły?

Umysły „innych zwierząt”

Umysły dzieci

Protomatematyka

„Jako istoty ludzkie rodzimy się wyposażeni w liczne intuicje dotyczące liczb, zbiorów, wielkości ciągłych, iteracji, logiki czy też geometrii przestrzeni”.

„Ponieważ ludzki genom rozwinął się w trakcie milionów lat ewolucji, prawdopodobnie dzielimy te wrodzone zdolności protomatematyczne z innymi gatunkami zwierzęcymi”.

Stanislas Dehaene (1997)

Czy zwierzęta liczą?

Samotna lwica słyszy (nagrany) ryk trzech innych lwic

1:3

Ta sama lwica w towarzystwie trzech sióstr słyszy ten sam nagrany ryk trzech lwic

4:3

Czy zwierzęta liczą?

Samotna lwica słyszy (nagrany) ryk trzech innych lwic

1:3

Wycofuje się

Ta sama lwica w towarzystwie trzech sióstr słyszy ten sam nagrany ryk trzech lwic

4:3

Eksploruje

Szybkie szacowanie (*subitizing*)

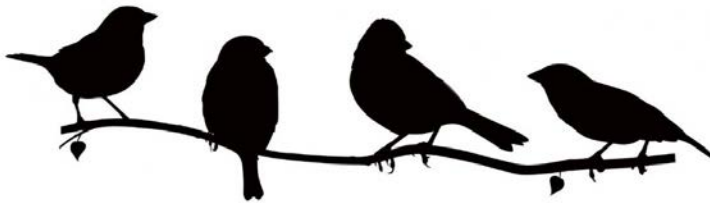
Kiedy drapieżny ptak atakuje stado mniejszych ptaków?



Szybkie szacowanie (*subitizing*)

Kiedy drapieżny ptak atakuje stado mniejszych ptaków?

$n \approx 4$



Ludzie też szybko szacują (bez liczenia) wartości w przedziale

$$1 \leq n \leq 4$$

Dlaczego?

Jeden	wiadomo
Dwa	tworzą odcinek
Trzy	tworzą odcinek lub trójkąt
Cztery	tworzą odcinek, trójkąt lub czworokąt

Szybkie szacowanie u dzieci

Lalki wchodzą za parawan

1 lub 2

Parawan się unosi:

Lalek jest tyle, ile powinno

Lalek jest o jedną więcej lub mniej

Obserwujemy czas koncentracji wzroku

Dzieci dłużej wpatrują się w coś, co nie ma prawa się zdarzyć

Niewłaściwa liczba lalek po odstąpieniu parawanu

Gdzie jest więcej kamieni?



Gdzie jest więcej kamieni?



**SZYBKIE SZACOWANIE WARTOŚCI ZNACZNIE
PRZEKRACZAJĄCYCH 4**

Porównywanie zbiorów przez gołębie





























Gołębie uczone
dziobać większy zbiór
kropek (dostawały
wtedy pokarm)



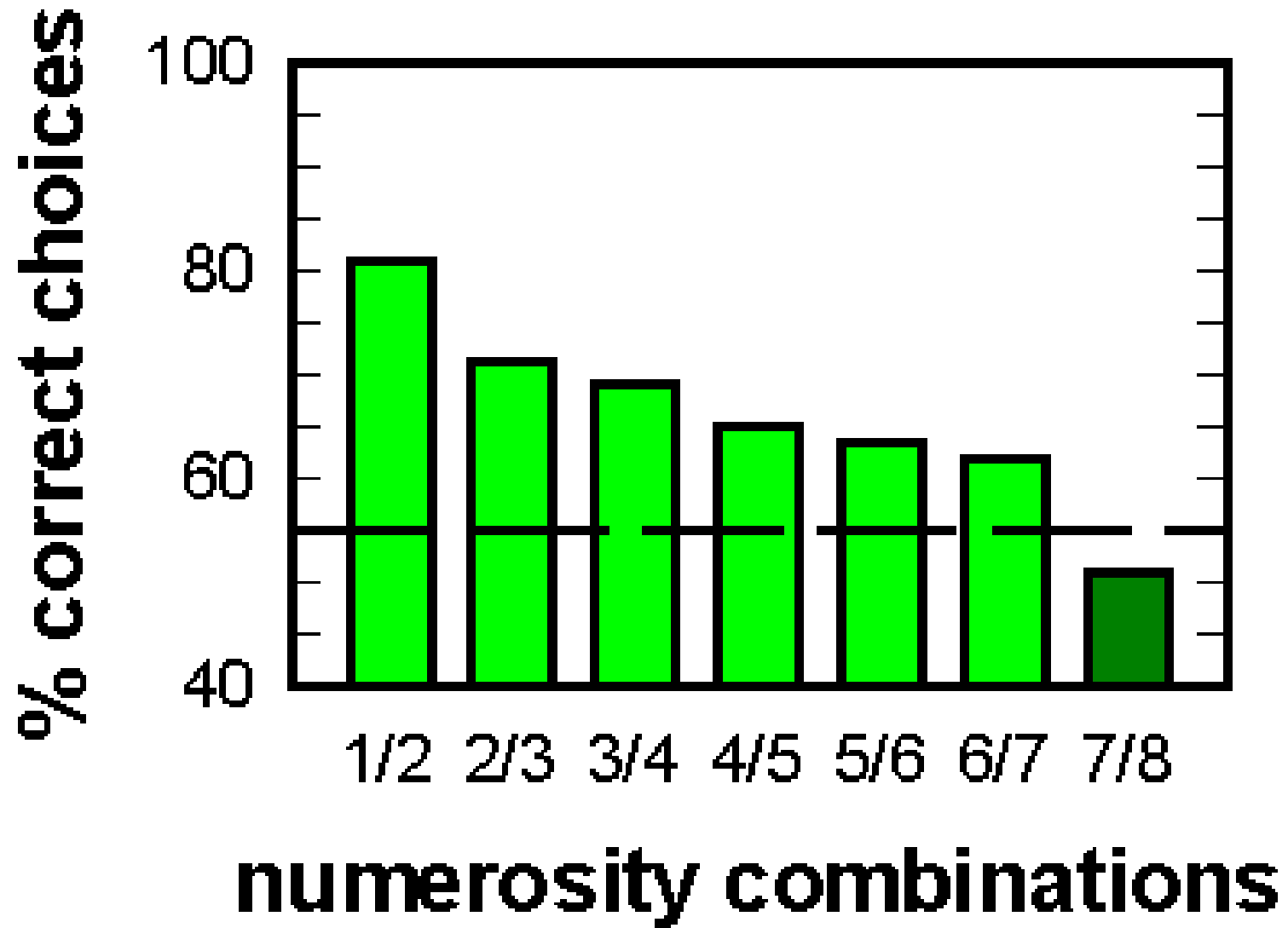
Porównania parami

1:2, 2:3, 3:4, 4:5, 5:6,
6:7, 7:8

Kontrolowano poziom
jasności bodźców

Test Stimuli			
L	R	L	R
			
			
			
			
			
			
			

Szacowanie powyżej poziomu
przypadku aż do 6:7



Pierwotne intuicje matematyczne

Poczucie liczby

Poczucie relacji

Proporcja

Większy/mniejszy

Ucieleśnienie (*embodiment*)

Ciało jako wehikuł poznania abstrakcyjnego

Przykłady ucieleśnienia poznania matematycznego

Przestrzenne kodowanie wielkości (SNARC)

Małe: lewa strona (lub dół)

Duże: prawa strona (lub góra)

Przestrzenne kodowanie czasu (STARARC)

Wcześniej lub krótkie: lewa strona lub tył

Później lub długie: prawa strona lub przód

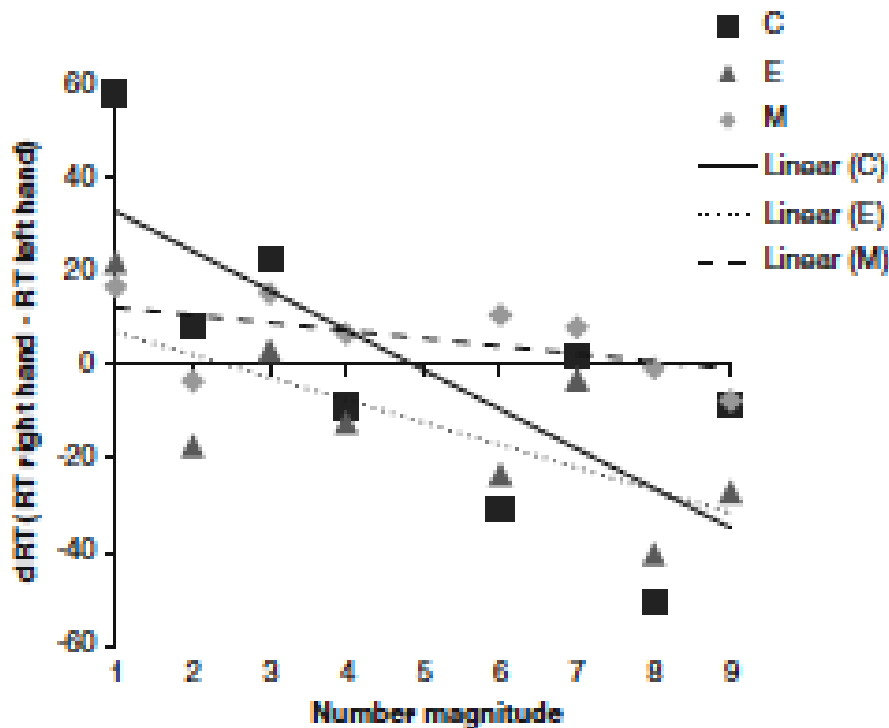
SNARC

Operacje na liczbach

- np. czy jest parzysta
- zbiór 1-4 versus 6-9

Operacje na zbiorach

- np. który jest większy
- Liczba Webera



(Cipora et al., 2015)

Czym jest matematyka?

Matematyka to umiejętność (sztuka) liczenia?

Liczą już zwierzęta (*subitizing*)

Zawodowi matematycy nie zawsze dobrze liczą!

Matematyka to uniwersalny język

Abstrakcja

Symbole

Zbiory

Reguły

Heurystyki (np. operowanie analogią)

Operowanie przestrzenią

Matematyka to ABSTRAKCJA

TWORZENIE ZBIORÓW

ABSTRAHOWANIE

VS

USZCZEGÓŁOWIANIE



Matematyk, który umie tylko uogólniać,
jest jak małpa, która potrafi tylko wspinać
się w górę

George Polya

Kategorie konkretne a kategorie abstrakcyjne

Czerwone jabłko

Jabłko \rightarrow owoc \rightarrow coś żywego

Coś czerwonego

Z innej beczki:

punkt, linia, płaszczyzna

prostokąt, kula, sfera

dziedzina funkcji

Typowe błędy

Błąd inkluzji zbiorów

Podzbiory są traktowane jak zbiory odrębne

„Moglibyśmy mieszkać jak ludzie”

„Bądź człowiekiem”

Błąd rzekomej tożsamości zbiorów

Relacja zbiór-podzbiór jest traktowana jak relacja tożsamości

Wszystkie psy mają cztery łapy

Mam cztery łapy (myśli kot)

Więc jestem psem!

Inkluzja klas

B B B B B

C C C



Czy więcej jest:

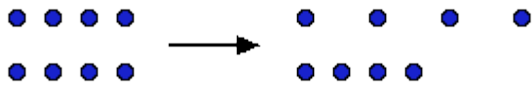
Krów białych czy krów czarnych?

Krów białych czy krów?

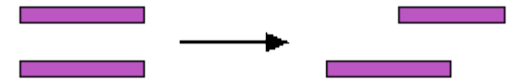
Białych krów, które się pasą, czy krów, które się pasą?

Zachowanie stałości

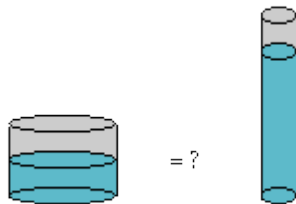
Stażość liczby (6-7)



Stażość długości (6-7)



Stażość objętości (7-8)



Stażość masy (8-9)



Wniosek

Umysł ludzki nie najlepiej radzi sobie z abstrakcją

Do 6-7 roku życia mamy problem z elementarną logiką

Miedzy 7 a 12 rokiem życia mamy problem z abstrahowaniem

Trudności w abstrakcyjnym myśleniu występują u większości ludzi przez całe życie

Jak to pogodzić z koniecznością

Uprawiania matematyki?

Nauczania matematyki?

ABSTRAHOWANIE

vs

USZCZEGÓLOWANIE

Matematyka to REGUŁY

Reguły logiczne

(potrzebne w dowodzeniu twierdzeń)

Jeśli p to q

p

więc q

Jeśli p to q

nieprawda, że q

więc nieprawda, że p

Jak to jest w nauce?

Jeśli TEORIA to FAKT

TEORIA

Więc FAKT (bez sensu, tego nie
potrzebujemy)

Jeśli TEORIA to FAKT

FAKT

Więc TEORIA (bez sensu, to rozumowanie jest
błędne)

Weryfikacja hipotez naukowych

Jeśli TEORIA to FAKT

Nie FAKT

Więc NIE TEORIA (falsyfikacja, wiedza
negatywna)

Jak uzyskać wiedzę pozytywną?

Jeśli TEORIA to FAKT

Jeśli NIE TEORIA, to FAKT ALTERNATYWNY

NIE TEORIA = hipoteza zerowa

Nieprawda, że FAKT ALTERNATYWNY

Nieprawda, że NIE TEORIA

(Odrzucamy hipotezę zerową jako mało prawdopodobną, $p < 0,05$)

Więc TEORIA (dowód nie wprost)

Weryfikacja hipotez poza nauką

Jeśli kocha, to nie zapomni o rocznicy

Nie zapomniał(a)

Więc kocha

BŁĄD W ROZUMOWANIU!

Jeśli kocha to nie zapomni o rocznicy

Zapomniał(a)

Więc nie kocha

ROZUMOWANIE POPRAWNE!

Błędy w rozumowaniu

- Skąd wynikają?
 - Brak kompetencji
 - Tendencyjność
 - Wpływ treści i kontekstu

Tendencyjność w rozumowaniu

Systematyczne błędy

Uniwersalne

Typowe dla większości ludzi

Pojawiają się w charakterystycznych momentach
procesu myślenia

Przykłady tendencyjności

Efekt konwersji przesłanek

- *Wszystkie A są B*
- *Więc wszystkie B są A*

- *Wszystkie psy są kudłate*
- *Wszystkie kudłacze są psami?*

Efekt atmosfery

- *Wszystkie A są B*
- *Wszystkie C są B*
- *Więc wszystkie A są C*

- *Wszystkie wróble są ptakami*
- *Wszystkie sikorki są ptakami*

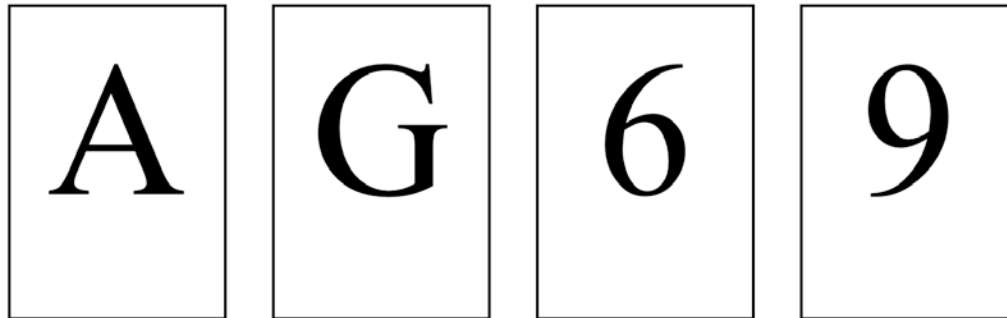
- *Więc wszystkie wróble są sikorkami*

Dlaczego tak łatwo się pomylić?

- *Wszyscy uczeni są dobrze wykształceni*
- *Wszyscy eksperci są dobrze wykształceni*
- *Więc wszyscy uczeni są ekspertami*

- Wniosek prawdziwy „sam w sobie” sprawia wrażenie, jak gdyby był poprawny logicznie

Wason: zadanie selekcyjne



Typowe wyniki badań

Jeśli G, to liczba nieparzysta

G 89% (dobrze)

9 62% (źle)

6 25% (dobrze)

A 16% (źle)

Jeśli H_0 , to wynik X. Stwierdzam nie X. Zatem nie H_0

Wersja realistyczna

Wyobraź sobie, że jesteś policjantem na służbie. Twoja praca polega na kontroli respektowania obowiązujących norm. Karty leżące przed tobą zawierają informacje o czterech osobach siedzących przy stole. Na jednej stronie karty podany jest wiek osoby, a na drugiej stronie – co dana osoba pije. Obowiązuje następująca reguła: Jeżeli ktoś pije piwo, to musi mieć ukończone 18 lat. Wskaż kartę albo karty, które koniecznie musisz odwrócić, aby ustalić, czy reguła została naruszona.

Wyniki w wersji realistycznej

73% podaje poprawne odpowiedzi

Nikt nie podał poprawnego rozwiązania w wersji abstrakcyjnej

Efekt materiału tematycznego

Wniosek

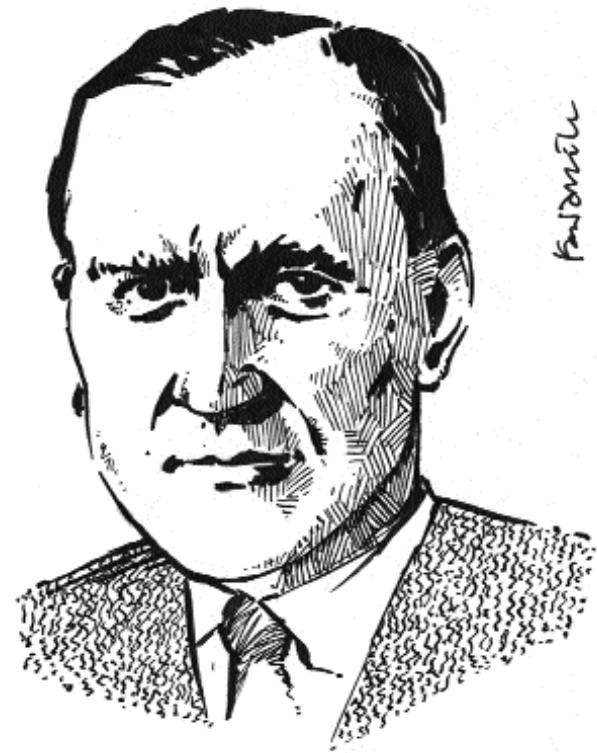
Ludzie mają poważne problemy z regułami logicznymi

Problemy te maleją, gdy materiał jest konkretny

Problemy te mogą zniknąć, gdy zaangażowany jest interes osobisty

Będziesz mógł pograć, jak posprzątasz pokój

Matematyka to HEURYSTYKI



Matematykiem jest, kto umie znajdować analogie między twierdzeniami, lepszym - kto widzi analogie między dowodami, jeszcze lepszym - kto dostrzega analogie między teoriami, a można wyobrazić sobie i takiego, co widzi analogie między analogiami

Stefan Banach

Dlaczego nie można dzielić przez zero?

Bo nie! (taka jest zasada)

Nawet kalkulator tego nie potrafi

Właściwie nie wiadomo

(Tym bardziej, że można mnożyć przez zero)

Dwa modele umysłowe dzielenia

Sprawiedliwy podział

Jak podzielić osiem jabłek na cztery osoby?

Jak podzielić osiem jabłek na zero osób?

Nie wiadomo

Problem pozostaje umysłowo nieuchwytny

Wypełnianie dużej rzeczy małymi rzeczami

Ile jabłek można włożyć do wydrążonej dyni?

Ile niczego można włożyć do wydrążonej dyni?

Nieskończenie wiele, albo ile chcesz

Od razu widać nonsens

Użyteczne analogie

Równanie jest jak dwie szalki wagi

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5$$

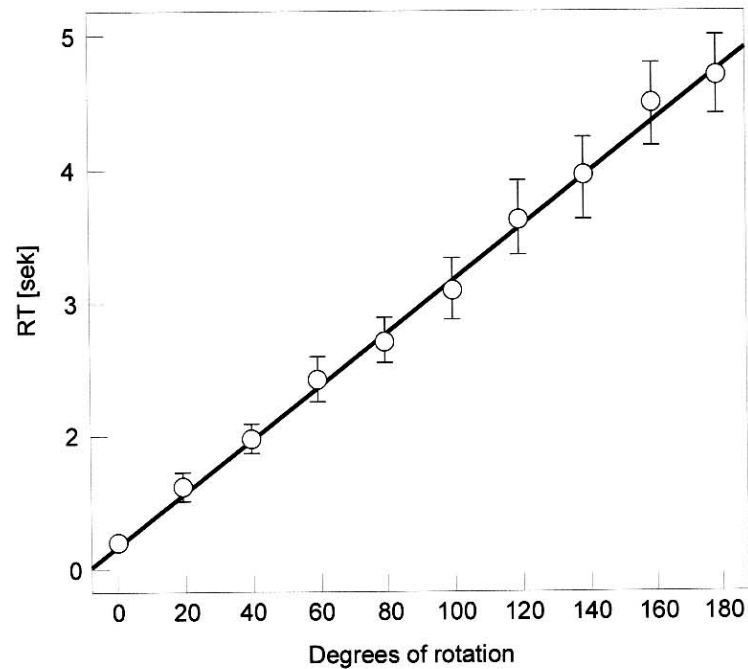
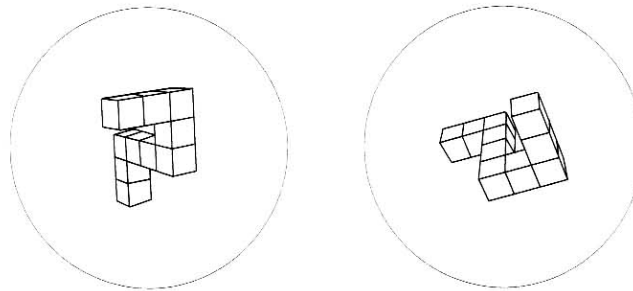


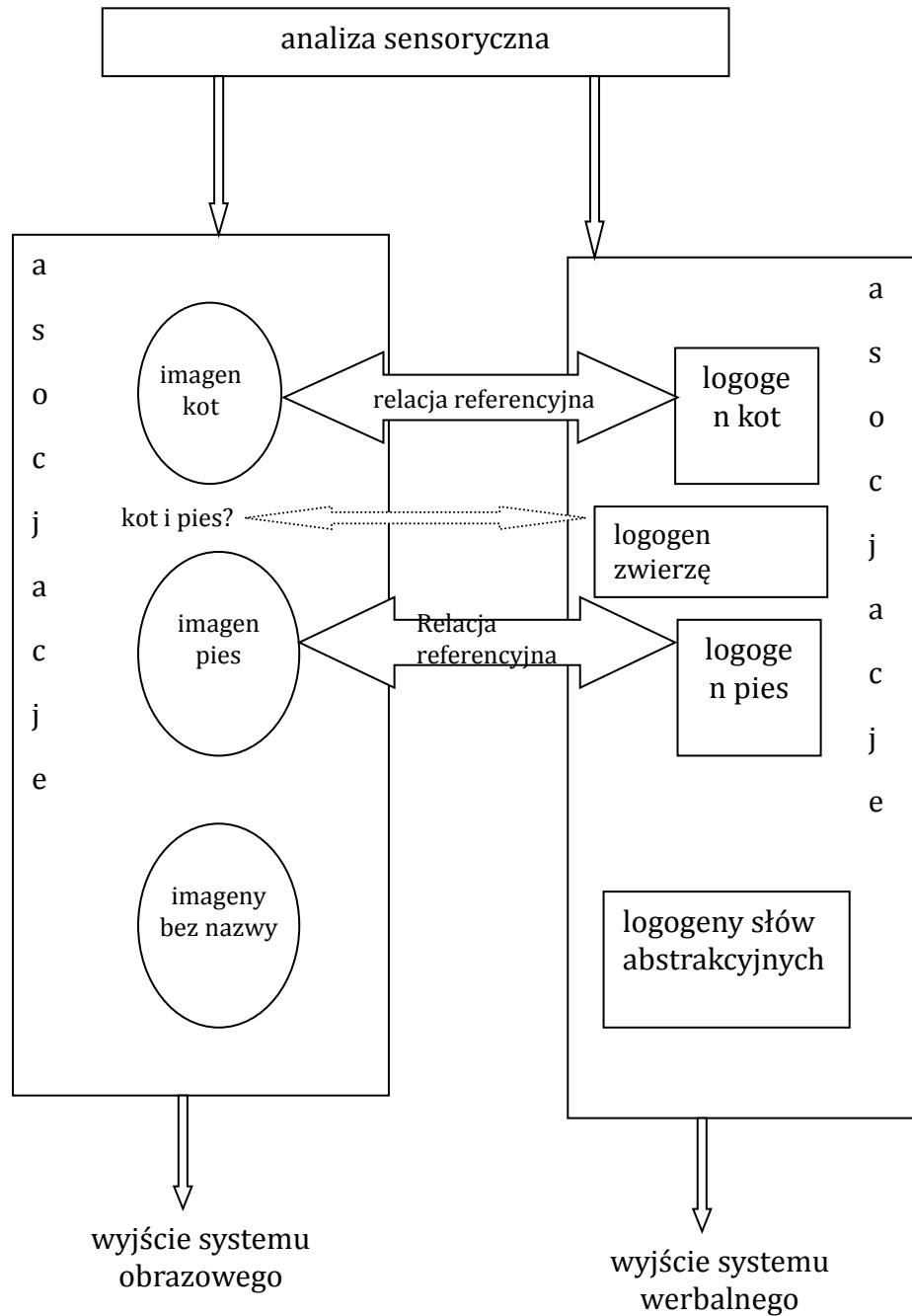
$$5^3 \neq 3^5$$

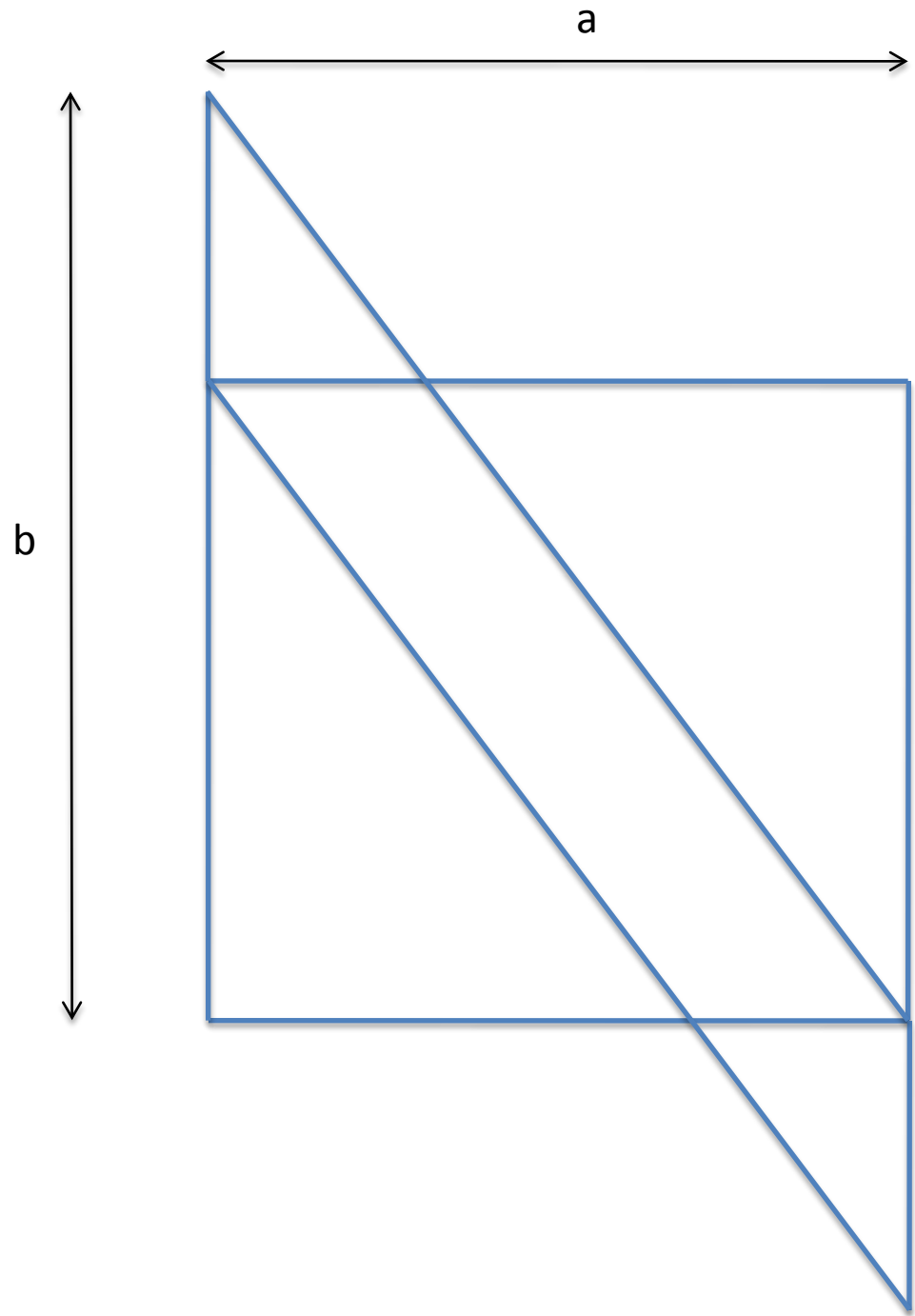


Matematyka to
OPEROWANIE PRZESTRZENIĄ

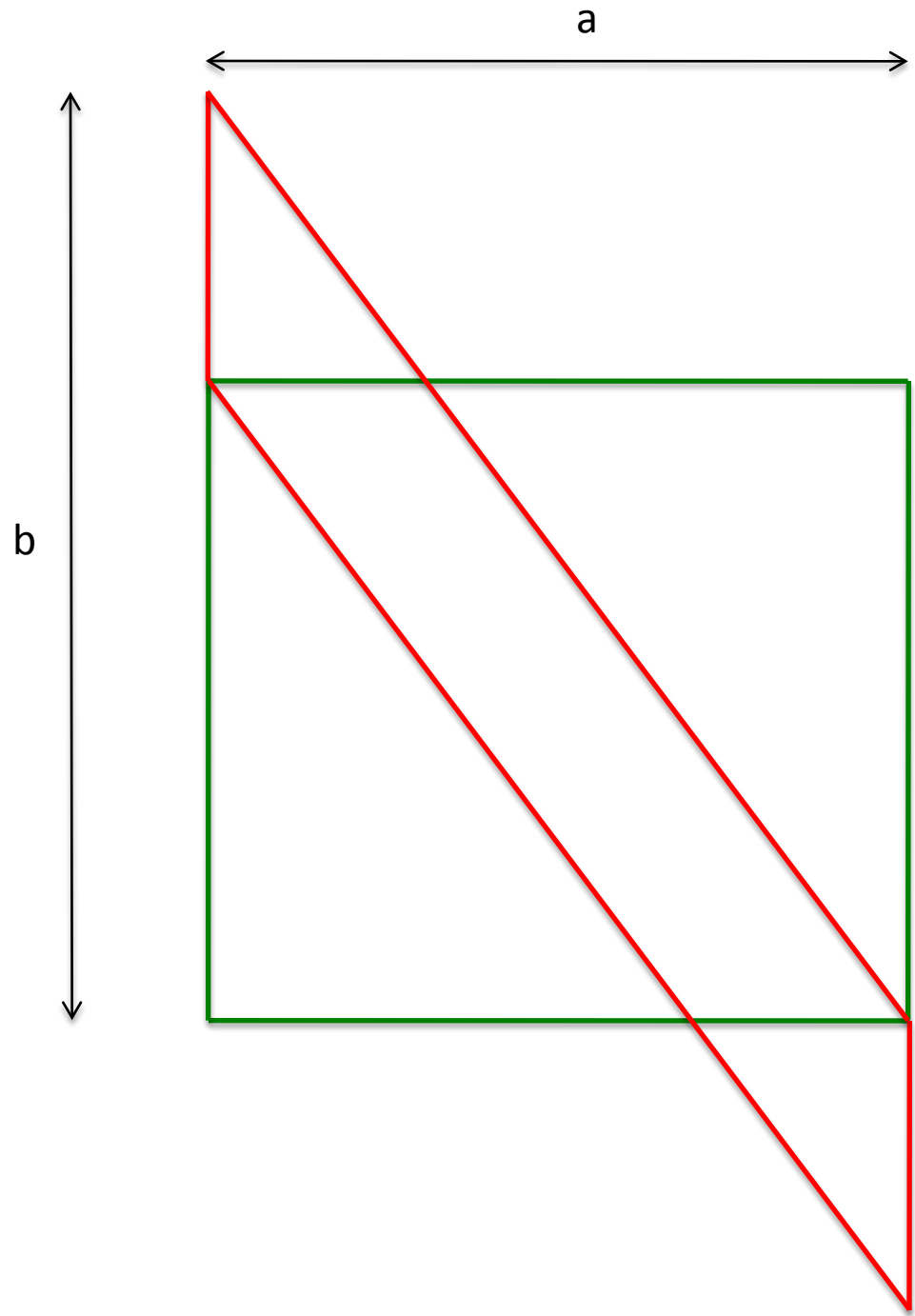
Badania: rotacje mentalne

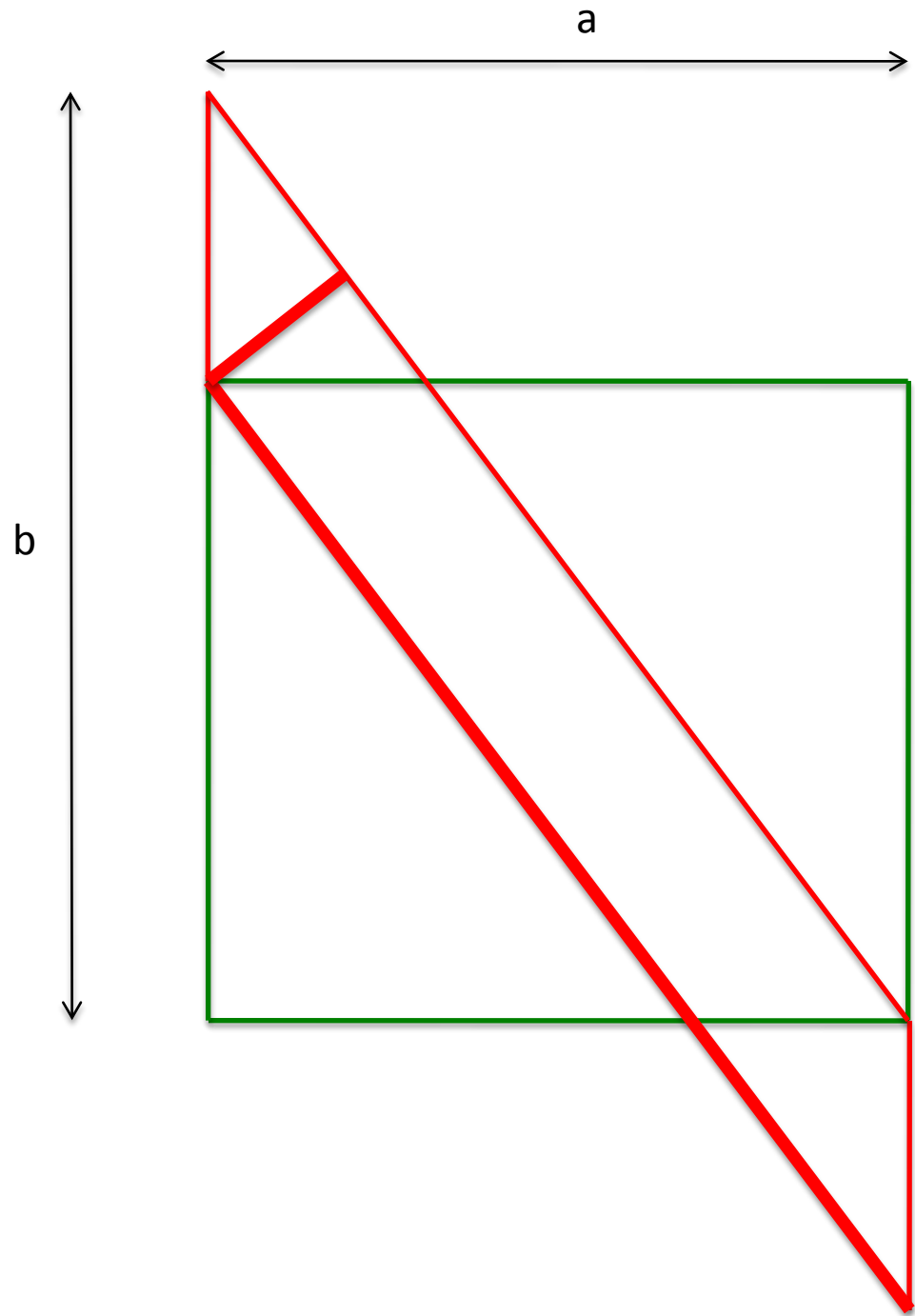






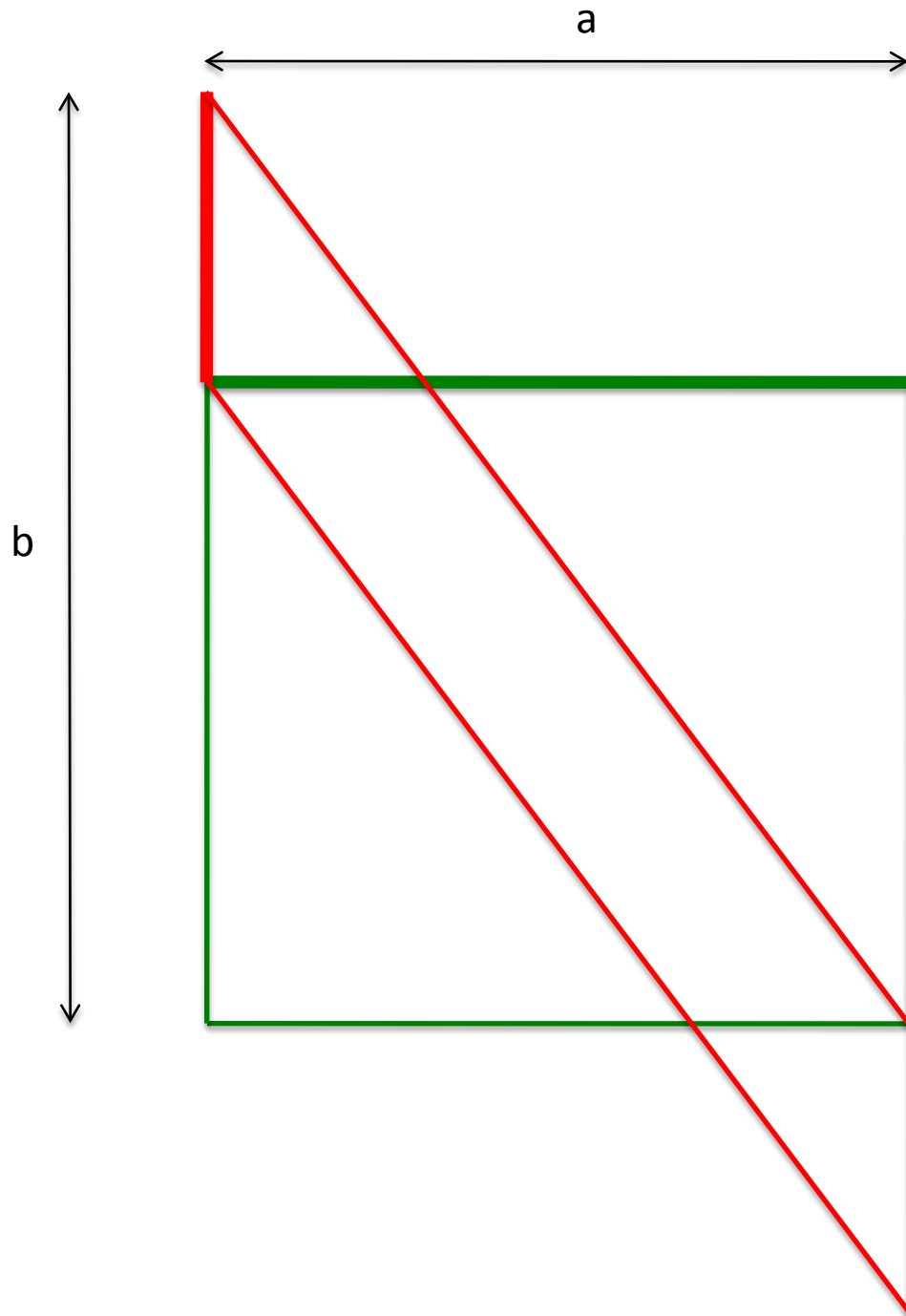
PROBLEM
RÓWNOLEGŁOBOKU





Pole =
Podstawa \times Wysokość

Podstawa = ?
Wysokość = ?



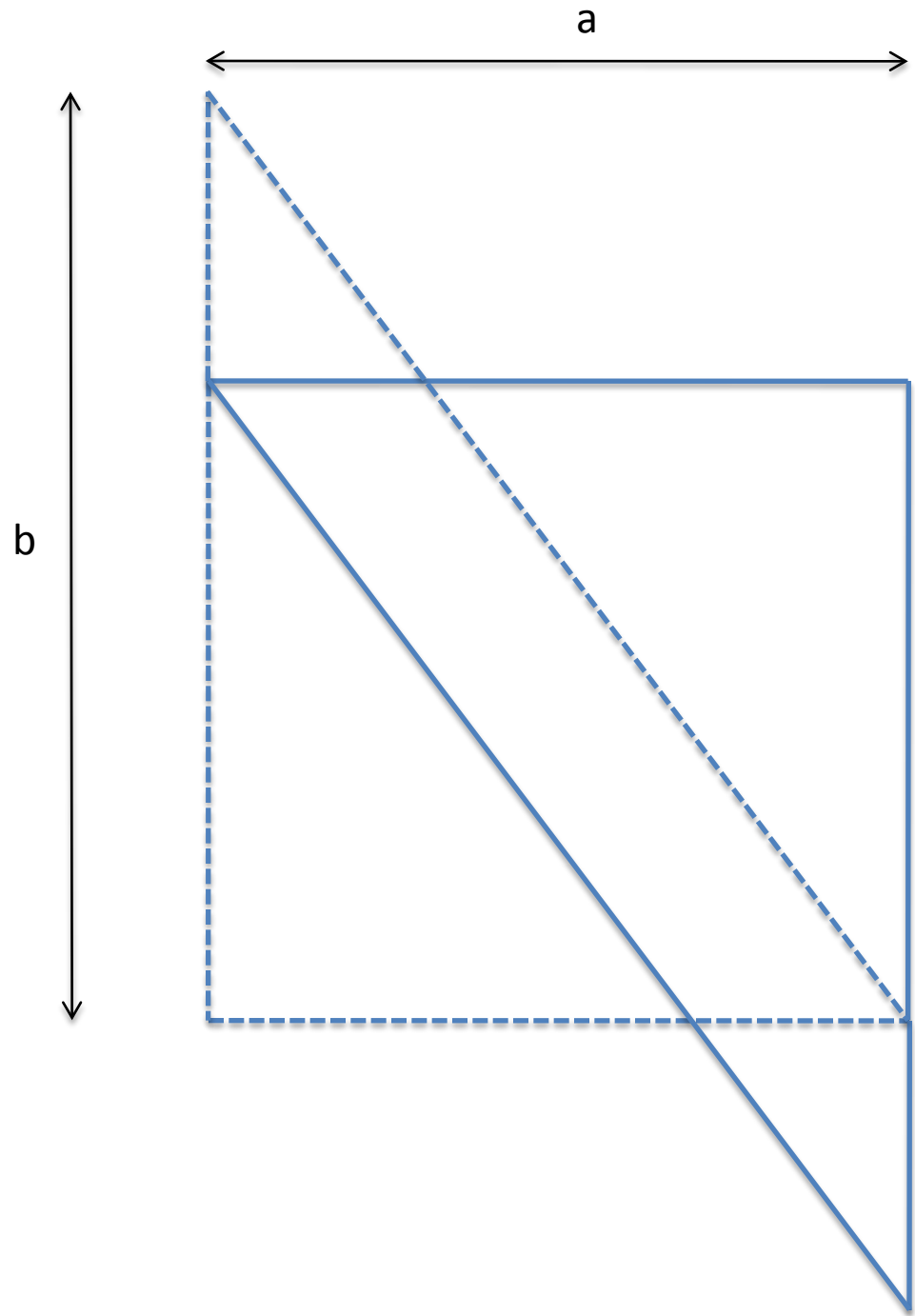
Pole =
Podstawa \times Wysokość

Podstawa = $b-a$

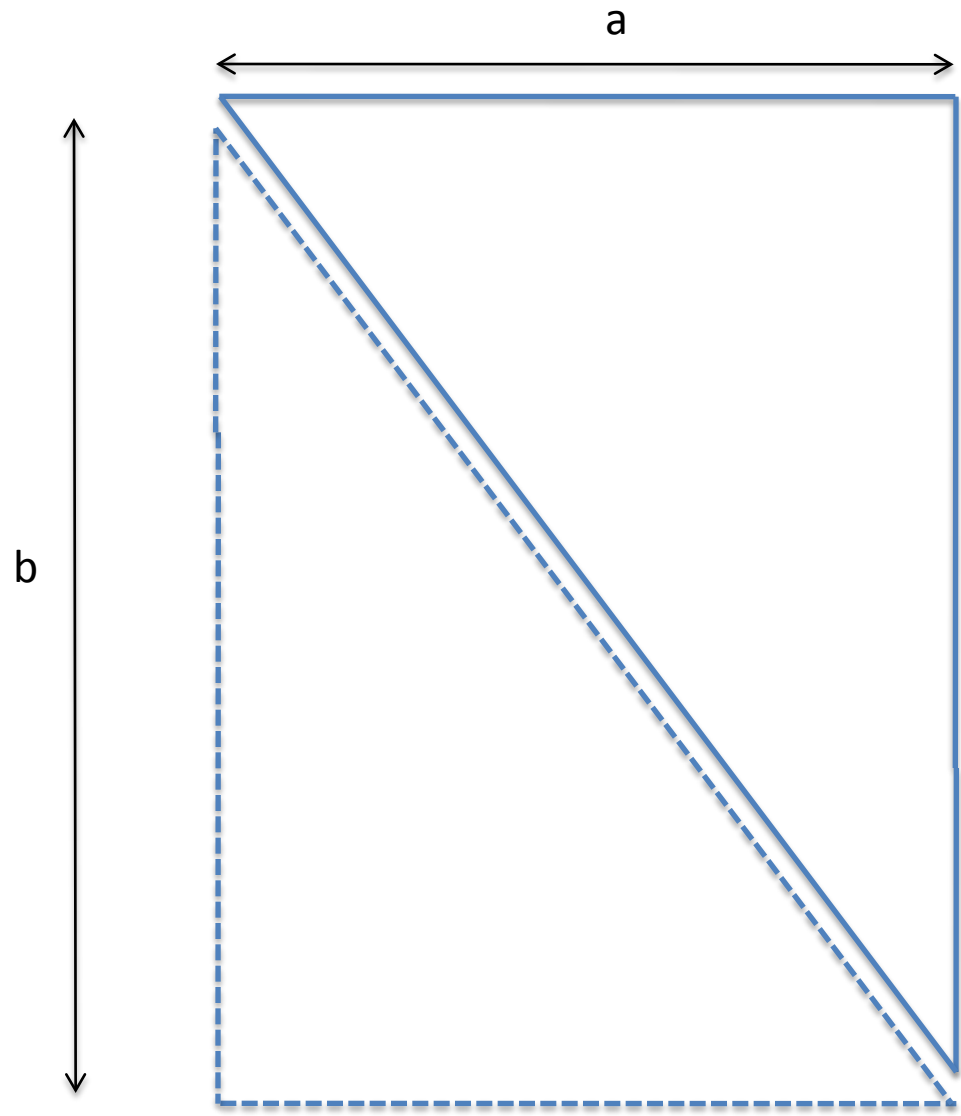
Wysokość = a

$$P = (b-a) \times a = a \times b - a^2$$

$$\text{Suma pól} = a^2 + a \times b - a^2 = a \times b$$



Suma pól =
Pole dwóch
trójkątów



Pytania

Który sposób lepiej uczy matematyki?

Który sposób lepiej rozwija umysł?

Wnioski ogólne

Wiedza o umyśle może pomóc w zrozumieniu

Jak ludzie uprawiają matematykę

Jak się jej uczą

Dlaczego czasami mają z tym problem

Umysł nie rozwinął się jako „maszyna ogólnego zastosowania”, lecz jako zbiór modułów

Przy tym jest wyposażony w zdolności i intuicje protomatematyczne

Wykorzystujmy je w dydaktyce matematyki!